Article :

« Tâche complexe : analyse d'une proposition d'un stagiaire Hervé Hoarau, collège Villey-Desmeserets, CAEN, sur la thématique des planisphères géographiques anciens et modernes. »

Niveau : Collège

Auteur : Ruben Rodriguez Herrera

Membre des équipes suivants : Ifé : PERMES, IREM : Didactique, Géométrie, IUFM : Recherche, Rectorat : Formation continuée de l'Académie de Basse-Normandie.

Nous remercions la collaboration de Claudine Plourdeau de notre équipe didactique IREM de Basse-Normandie et PERMES de l'Ifé.

Nous remercions la relecture et remarques de Carole Flandrin avec qui nous avons travaillé ensemble dans la formation pour le second degré du rectorat sur les stages autour de la notion de la didactique : « Les Taches Complexes ».

Mots clés : didactique, tâche complexe, savoir, connaissance, savoir-faire, capacité, attitude, situation « a-didactique », stratégie, modéliser, univers familier, recherche, contrat didactique, transposition didactique, erreur, obstacle.

Résumé : Dans cet article on analyse la possibilité de créer une tâche complexe à partir d'un support constitué de cartes planisphères anciens et modernes. On se situe par rapport au concept de la didactique des mathématiques, nommé « tache complexe » et on effectue une analyse didactique « a priori » pour voir éventuellement la possibilité de la construire et réaliser une première expérimentation.

Introduction

Lors d'un de nos stages de formation continuée pendant la deuxième journée nous avons vu avec satisfaction que tous nos collègues étaient enthousiastes et appréciaient d'enseigner les mathématiques à partir de « tâches complexes ».

C'est ainsi qu'ils ont expérimenté avec plaisir des enseignements sur des « tâches complexes ». Parmi les collègues l'un d'entre eux nous interroge: « si une activité à partir de cartes planisphères anciens et plus modernes, peut aboutir à une activité : tâche complexe ».

Ceci nous a permis de réfléchir encore une fois sur ce qu'est une activité cataloguée de « tâche complexe ».

Quelles sont mes réflexions et mon analyse sur ce sujet ?

I) « Tâche complexe »

Ses caractéristiques :

a) **L'activité des élèves et de l'enseignant se réalise dans une pédagogie conjointe où les actions, rétroactions et ajustements se produisent de manière naturelle.** Les élèves prennent librement des initiatives et l'enseignant régule son prévisionnel en fonction des interactions de la séance. Si on se réfère à la notion théorique de situation « a-didactique » de Brousseau, les élèves dans une « tâche complexe » sont dans cette situation, car c'est à chaque élève de prendre des décisions, d'engager des stratégies et d'évaluer leur efficacité. L'élève se comporte de façon naturelle. Dans ce sens on pourrait dire plutôt « situation a-scolaire ».

b) Les élèves doivent pouvoir s'y engager sans difficulté et alors **l'univers où la tache complexe est posée doit être familier des élèves.**

c) **La question principale posée doit être facilement compréhensible, mais par contre elle doit permettre à chaque élève d'exprimer ses compétences**, c'est à dire: connaissances ou savoirs, capacités ou savoirs-faire et attitudes. L'élève prend l'initiative de produire, l'enseignant n'a pas besoin de lui dire comment faire pour trouver la solution.

Sur cette partie je voudrais aussi partager avec vous les résultats de mes recherches en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive.

Le fait que l'élève exprime plusieurs compétences apparaît quand il peut naturellement avoir recours à plusieurs univers familiers auxquels il se réfère et qu'il mettra en correspondance. Par exemple, si dans une tâche complexe, il peut se référer à un univers numérique de proportions , à un univers graphique de schémas, à un univers géométrique de constructions, à un univers verbal des propriétés, à un univers de manipulations avec des formes, à un univers de géométrie dynamique (GEOGEBRA, CABRI), à un univers algorithmique avec tableur,...(qui doivent lui être familiers), alors il pourra mobiliser des connaissances, des capacités et des attitudes.

Un univers est donc un ensemble restreint où l'élève peut construire et/ou trouver des relations et des opérations.

Par exemple : l'univers des droites parallèles, perpendiculaires par pliages sur une feuille de contour irrégulier. Les droites sont les éléments homogènes de cet univers, car elles se construisent toutes par la même manipulation de pliage. Les relations sont celles du parallélisme et perpendicularité. Une opération possible est par exemple la construction par pliage d'une perpendiculaire à une perpendiculaire.

L'enseignant propose aux élèves un parcours d'apprentissage où les élèves rencontrent différents univers. La correspondance entre ces univers choisie par les élèves est mathématiquement un morphisme car les structures se correspondent. Ainsi le résultat trouvé dans un univers permet de valider et vérifier le résultat trouvé dans un autre univers. Ce morphisme est un phénomène naturel de la psychologie cognitive des humains dans toute situation naturelle où il faut élargir ses compétences. On peut les nommer par un mot composé : « psycho » en préfixe suivi de « morphisme » pour obtenir mot « psychomorphisme ». Par exemple quand les élèves travaillent plus tard dans leur parcours sur l'univers des parallèles et perpendiculaires par construction avec l'équerre, ils utilisent naturellement une correspondance morphique avec le précédent univers des droites parallèles, perpendiculaires par pliages sur une feuille de contour irrégulier.

d) **Plusieurs procédures peuvent être ainsi utilisées par les élèves** et les élèves peuvent se poser des nouvelles questions.

e) En terme de **« contrat didactique »** au sens de Brousseau et de Chevallard**, la place de la recherche, de l'erreur et de son analyse, doit être une composante tout à fait naturelle dans la tâche des élèves.**

f) La tâche complexe permet de suivre un élève et évaluer ses capacités (et/ou compétences) qui sont identifiables en amont, lors de la construction de la tâche, par exemple: maîtrise de la langue, qualité du raisonnement élaboré, capacité à communiquer, etc.

Dans une tâche complexe, il faut prévoir pour les élèves une possibilité d'auto-évaluation.

L'évaluation de la tâche complexe valorise les démarches cognitives de l'élève : elle vise à identifier ce que l'élève sait faire en mobilisant ses connaissances. On ne fera donc pas la liste des connaissances attendues puisque l'élève est laissé libre de choisir les éléments qu'il retient ; on évaluera la pertinence du raisonnement par rapport aux mathématiques qu'il mobilise dans les stratégies qu'il choisit, (construction, justification par un appui sur des connaissances précises...), la cohérence des réponses et stratégies et la capacité de l'élève à communiquer le résultat de son travail, notamment l'exactitude, et complétude du discours.

Elle vise à conforter la confiance en soi de l'élève, à développer l'idée qu'il peut apprendre à gérer un risque, tenter, essayer et que l'erreur est constructive, donc qu'elle est au centre, pour que dans une pédagogie conjointe au sens de Sensevy G., on installe un contrat didactique cohérent avec les objectifs pédagogiques de la « tâche complexe ».

g) **Une « tâche complexe » n'est surtout pas une « tâche compliquée »**

Une tâche compliquée est celle qui se place très loin de la zone des compétences des élèves, donc on ne doit pas la confondre avec une « tâche complexe ». La

complication vient du fait que la tâche sollicitée est loin de l'univers des compétences des élèves d'un niveau déterminé. C'est-à-dire que les élèves sont forcés dans une tâche compliquée à cause d'une perte de sens à adopter une attitude d'imitation et l'enseignant une attitude de pédagogie transmissive car il est aussi forcé à se comporter par une posture plus transmissive.

Dans une tâche complexe, on est dans une pédagogie de « situation-problème » c'est à dire une « pédagogie des questions des élèves » et non dans la « pédagogie transmissive de la réponse », comme il a été dit par Philippe Meirieu.

II) Une première analyse

Elle consiste à regarder quelles sont les mathématiques qui rentrent dans les cartes planisphères.

Pour cela nous allons citer Gérard Vergnaud à propos de cette étape fondamentale dans la didactique de la préparation de la « tâche complexe ».

« On le voit, la didactique est aussi étroitement liée à l'épistémologie des disciplines qu'à la psychologie du développement cognitif. On entend ici par épistémologie la relation entre les questions que se pose un scientifique (ou un professionnel) et les connaissances qui répondent à ces questions. C'est un sens relativement limité du terme épistémologie, mais il est opératoire, en ce sens qu'il permet justement de se demander comment transposer, à l'intérieur de l'école, les questions que se sont posées les hommes au cours de l'histoire. » (bibliographie N°5)

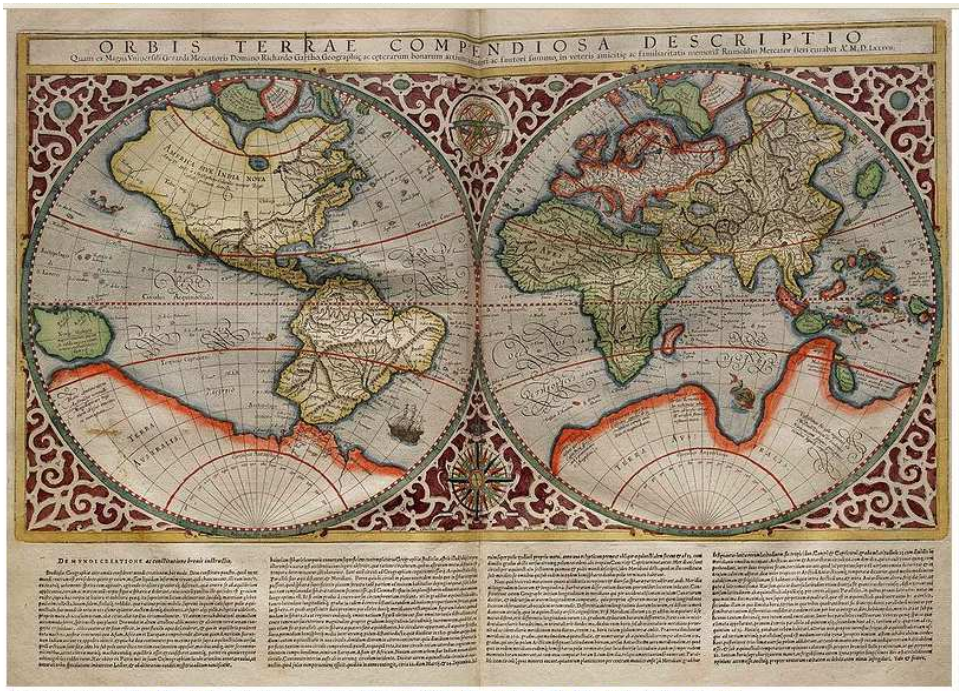
Dans cette partie on doit se situer par rapport au type de questions mathématiques que peut se poser un professionnel de la cartographie à propos de planisphères. Ceci nous permet aussi d'avancer dans nos propres connaissances en cherchant des informations sur la cartographie.

Notre collègue a montré comme support quelques planisphères connus, historiques et modernes et il nous a questionné sur la possibilité ou non d'en faire une tâche complexe au collège.

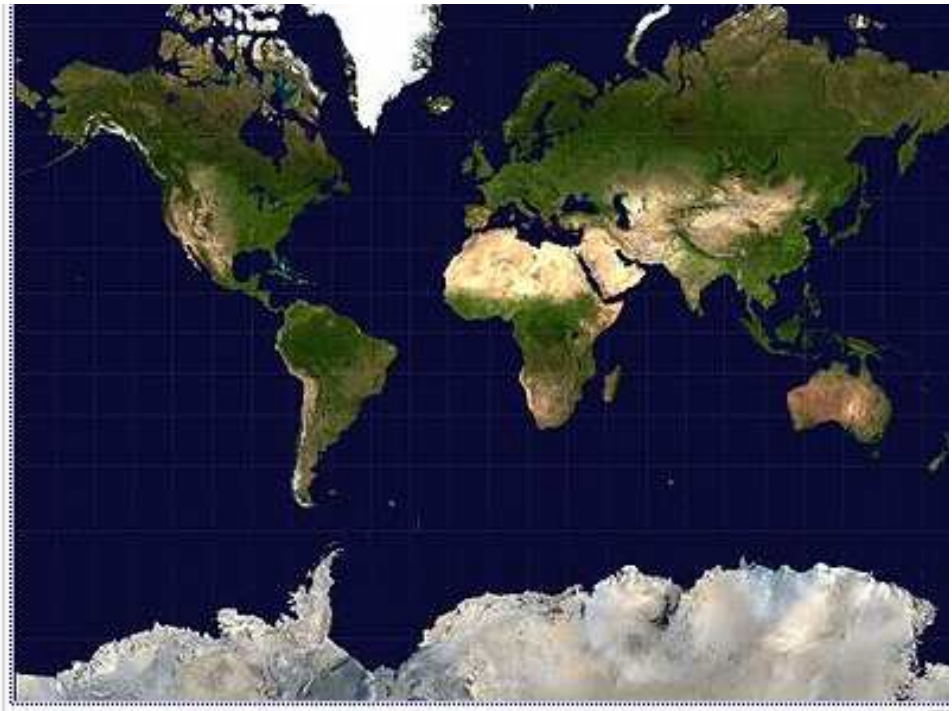
Nous allons ici partager avec vous nos recherches sur les connaissances scientifiques et les questions qui sont à la base des planisphères.

1 - Planisphère de Mercator :

Voici le dessin de Mercator



Voici le planisphère dessiné selon la projection de Mercator



Planisphère du monde selon la projection de Mercator.

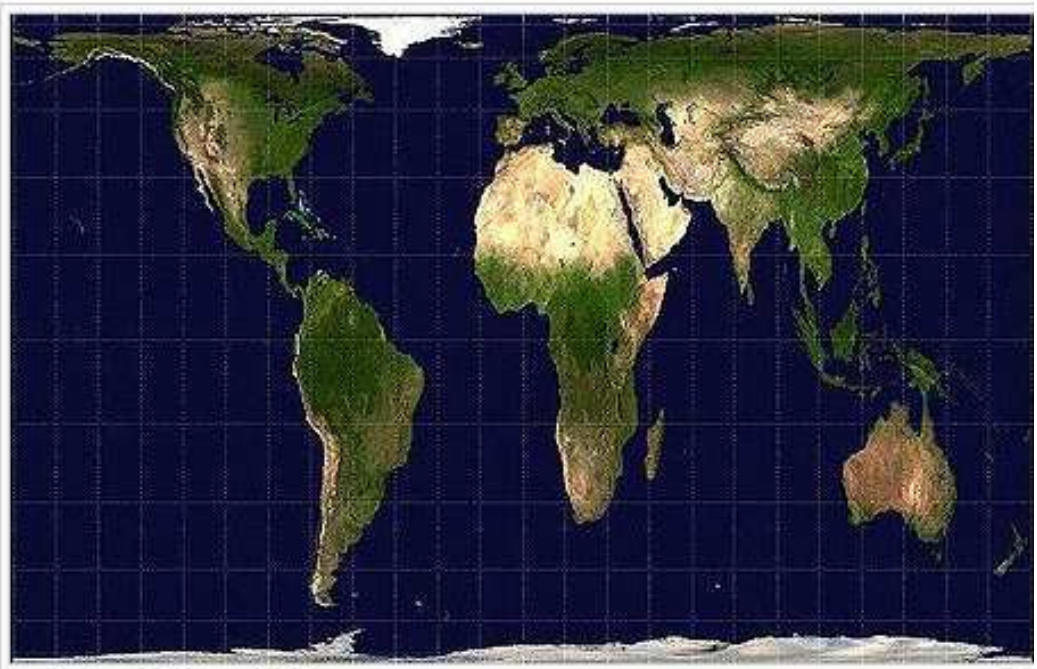
La projection utilisée par Mercator en 1569 est cylindrique, la modélisation mathématique actuelle fait intervenir des équations aux dérivées partielles, la fonction logarithme de base e, l'intégration, le calcul différentiel, les fonctions trigonométriques circulaires directes et inverses, les trigonométriques hyperboliques directes et inverses, la fonction de Gudermann directe et réciproque, les fonctions elliptiques de Jacobi, une intégrale elliptique, une interprétation géométrique avec l'inversion, spirale logarithmique, distance orthodromique, produit scalaire, produit vectoriel ,...

Donc on voit clairement que la question :

« Comment cette carte se modélise mathématiquement ? », n'est pas du ressort du collège.

2- La projection de Peters

La projection de Peters au 18ème siècle est une projection cartographique. On a comme objectif de tenir en compte la proportion des aires des surfaces des continents comme dans la « réalité ». Ceci pour remédier ce qui ne se produit pas sur la projection de Mercator.



Projection de Peters de la Terre

Les cartographes se sont confrontés au problème difficile de respecter dans une projection les formes du contour des régions au sens de la similitude des formes, et de respecter les aires des surfaces de ces régions.

Peters proposa d'agrandir les ordonnées dans un repère plan d'un certain coefficient multiplicatif $\gamma > 1$ et réduire les abscisses selon le multiplicateur $1/\gamma$ et alors les aires seront conservées car, dans l'échelle d'aire de la carte, on multiplie par $(1/\gamma)$. $\gamma = 1$, donc on respecte la proportion des aires des surfaces. Peters proposa de prendre $\lambda = 45°$, alors $\cos(45°)=\sqrt{2}/2$ et $\gamma = \sqrt{2}$.

Cette projection de Peters est un cas particulier de projection cylindrique, elle a l'inconvénient d'être non conforme pour les zones tropicales, par contre le format du planisphère est harmonieux et proche du format A4 .

Du point de vue didactique on voit aussi que cette projection est fondée sur de modélisations mathématiques qui s'appuient sur de connaissances hors de ce que Vigostki L. nomma la « zone proximale de développement » c'est à dire « la distance entre ce que l'élève peut effectuer ou apprendre seul et ce qu'il peut apprendre uniquement avec l'aide de l'enseignant ».

3- L'écoumène de Ptolémée

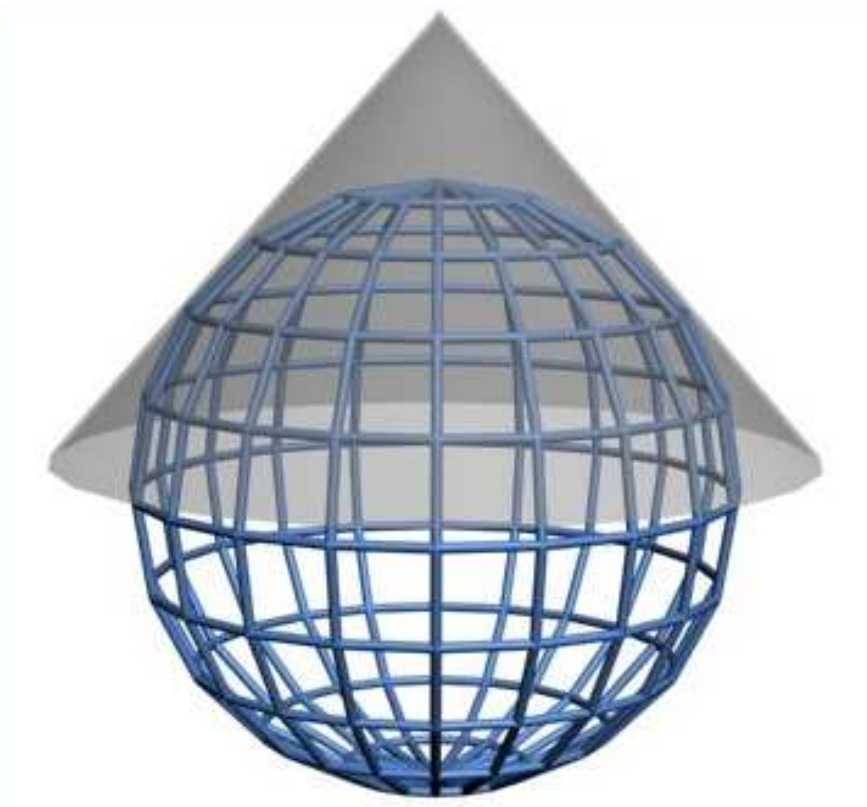
Le planisphère dit l'écoumène de Ptolémée, se trouve dans *Cosmographia* qui est un traité rédigé par Ptolémée vers l'an 150 . Le nom romain de Claude Ptolémée est Claudius Ptolemaeus.

Ptolémée utilise deux projections pouvant pour réaliser une carte générale de l'écoumène, c'est à dire l'ensemble des terres habitées connues à son époque, qui allaient à peu près de Thulé, probablement l'Islande ou Norvège, à l'Anti-Méroé, à la latitude 16°25' S. La première, qui est plus simple, on peut la voir comme une projection conique: les parallèles sont représentées avec des cercles concentriques et les méridiens avec des droites qui convergent vers un même point unique. Dans cette représentation on obtient la représentation des parallèles terrestres par des arcs dont la longueur va en grandissant vers le sud, alors que quand on dépasse l'équateur, la longueur réelle doit diminuer en accord avec le fait que la Terre est un solide proche d'une sphère. Ptolémée modifia la projection du faisceau placé au sud de l'équateur de la façon suivante : il a attribué à l'arc qui représente le parallèle le plus au sud (c'est-à-dire le parallèle d'Anti-Méroé, à la latitude 16° 25' S) la même longueur que son symétrique respectif à l'équateur, celui de Méroé, ville qui se trouve au Soudan aujourd'hui, (à la latitude 16° 25' N), ainsi il tient compte de la symétrie de la Terre par rapport au plan équatorial. Il trace ensuite la représentation des méridiens au sud de l'équateur avec des segments qui ont pour extrémités un point de l'équateur et le point du parallèle d'Anti-Méroé placés tous les deux sur la même longitude.

La deuxième projection de Ptolémée est plus complexe. Elle représente les méridiens non pas avec des segments de droite, mais avec des arcs, sauf le segment [AB] du méridien central faisant partie de l'écoumène (90° à l'est des îles des Bienheureux: probablement les îles Canaries ou celles du Cap Vert), qui est représenté par une ligne verticale sur laquelle les distances sont proportionnelles aux « distances de la réalité ». Sur la prolongation de [AB] par le tracé d'une partie de la droite support de ce segment, vers le nord, Ptolémée choisit un point C comme centre des arcs qui vont représenter les parallèles. Il trace trois arcs de cercle de centre C et qui passent par les deux extrémités du segment [AB] et par le point

milieu, ceux-ci représentent trois parallèles : deux aux extrémités pour marquer les limites de l'écoumène (le parallèle de Thulé au nord, et celui de l'Anti-Meroé au sud) et un troisième à mi-chemin entre les deux. La longueur des arcs est choisie de façon à reproduire les parallèles selon la même échelle que celle utilisée pour le méridien central. Chacun des trois parallèles est divisé en arc de même longueur pour permettre d'inscrire les longitudes à intervalles de 5 degrés. Les méridiens (tracés tous les 5 degrés) sont ensuite dessinés en forme d'arcs qui passent par les trois points de même longitude sur les trois parallèles spéciaux. Les autres parallèles sont tracés avec des arcs concentriques aux trois précédents, mais les distances représentés par ces nouveaux parallèles ne sont pas proportionnelles à la réalité. Ptolémée y établit par exemple une table donnant les longueurs des cordes qui sous-tendent les arcs d'un cercle, ce qui équivaut à dresser une table des sinus. Il donne également une excellente approximation du nombre π.

Cette modélisation mathématique conduit donc à une projection conique conforme, c'est à dire qui conserve les angles. La Terre est supposée avoir la forme d'un ellipsoïde de révolution, le sommet du cône appartient à l'axe des pôles, donc à l'ellipsoïde.



Nous voyons ici que les modèles mathématiques qui expliquent la construction de ces cartes, sont aussi en dehors de la zone de développement des compétences des élèves et ne pourront pas s'approcher à la dernière étape du parcours d'apprentissage des élèves du collège, qui est celle de la formalisation mathématique.

Tout ce que les élèves peuvent faire est de trouver dans l'univers des instruments géométriques où se trouvent les centres des arcs de cercle ou dans la première projection où se trouve le centre du faisceau des droites, aussi les cercles concentriques et le partage en 5 degrés des méridiens. Mais ceci est une activité plutôt expérimentale comme celle du cycle 3 de l'école primaire.

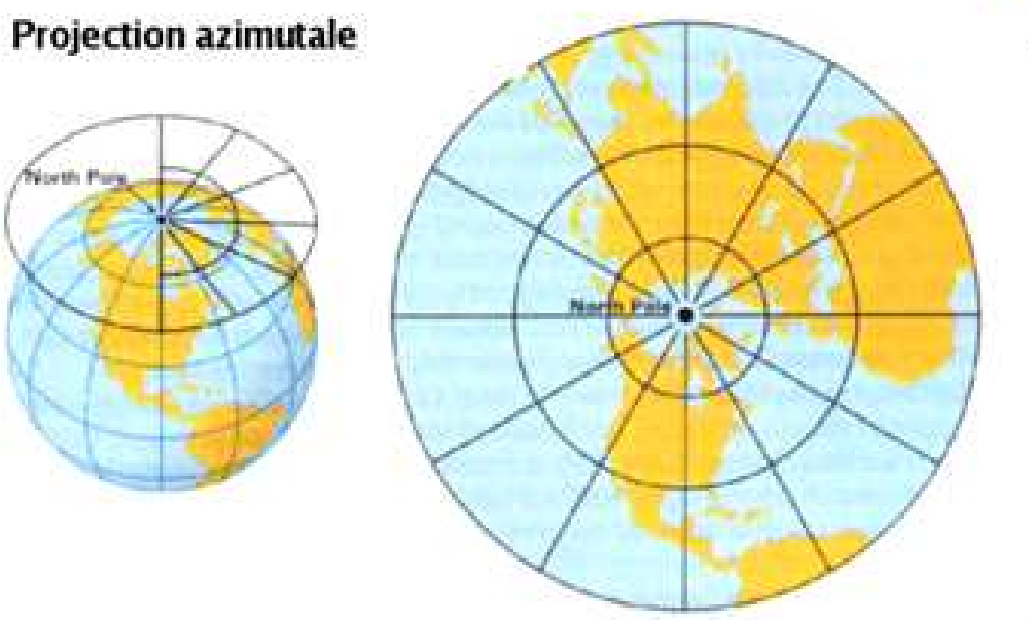
4- La projection de Fuller

Elle a été créée par Richard Buckminster Fuller, en 1946, sous la forme d'une projection sur un cuboctaèdre et sur un icosaèdre en 1954.

Ici la présence du cuboctaèdre et de l'icosaèdre peut susciter chez les élèves l'envie de faire un patron et réaliser les cuboctaèdre et icosaèdre dans l'espace, mais ceci ne les mets pas sur la piste de répondre à la question posée, sur l'accord des aires dans les planisphères et les aires dans la « réalité ».

5- La projection de Postel

La projection de Postel est une projection azimutale polaire, (le plan tangente où l'on projette est tangent dans un pôle), équidistante pour les méridiens. Pour sa réalisation, on applique sur le globe terrestre une feuille de papier plat, on obtient une projection qui conserve les longueurs. Cette projection dite de Guillaume Postel date de 1580.



Ici encore les élèves de collège peuvent constater certaines propriétés de la projection sur le dessin de droite, mais ils sont loin d'une « tâche complexe ».

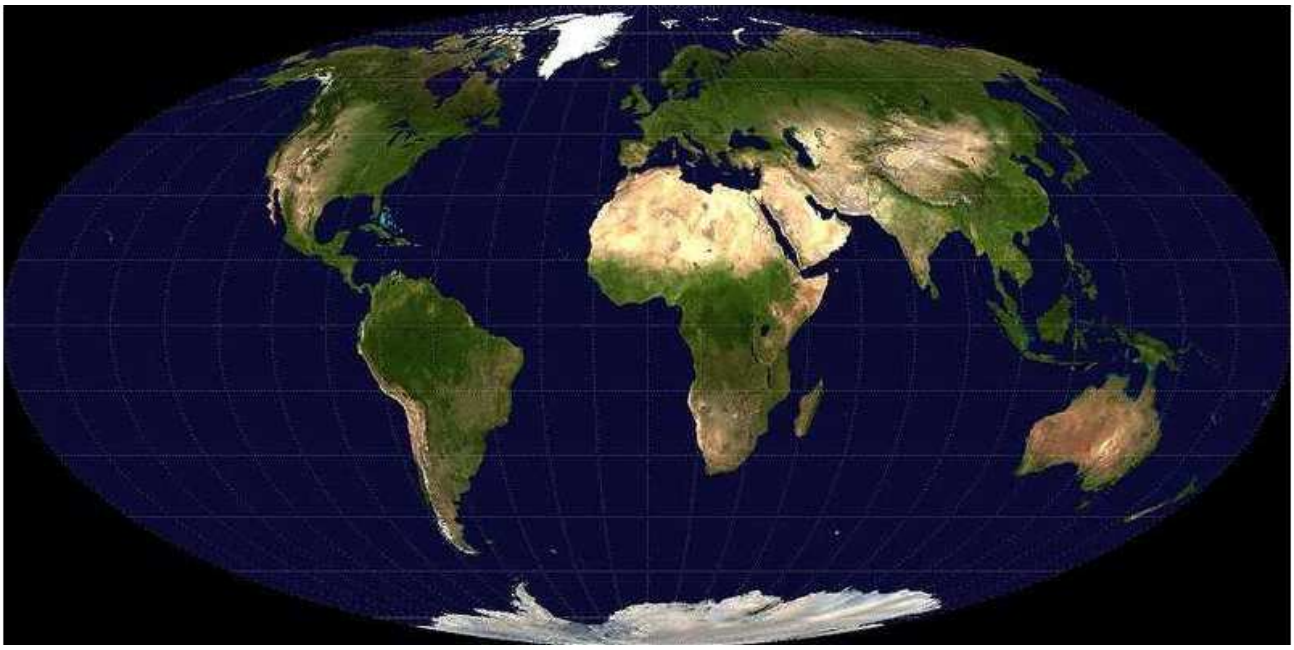
Nous allons citer ici d'autres projections qui sont aussi d'un niveau de modélisation mathématique qui est en dehors de la « zone proximale de développement » des élèves du collège, au sens de Vigotski L.

6- La projection orthographique

Une projection orthographique est un type de projection cartographique. C'est, comme une projection stéréographique et une projection gnomique, une projection de perspective par laquelle une sphère est projetée sur un plan tangent. Le *point de la perspective* est à une distance infinie. On perçoit un hémisphère du globe comme si on était situé dans l'espace. Les surfaces et formes sont déformées, mais les distances sont préservées sur des lignes parallèles.

On obtient les formules de la projection orthographique, qui relient longitude λ et latitude Φ sur la sphère, aux coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan tangent par trigonométrie du niveau lycée.

7- La projection de Mollweide

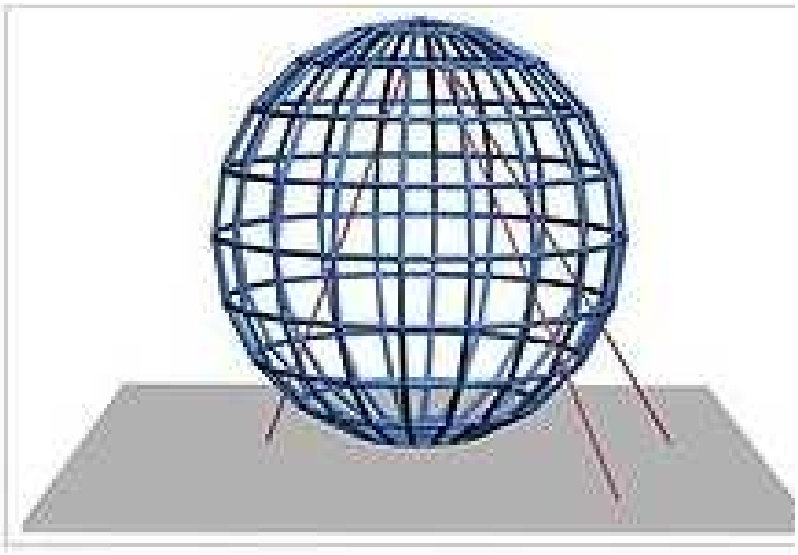


La projection de Mollweide est une projection cartographique pseudo-cylindrique employée le plus souvent pour les planisphères de la Terre (ou du ciel). Connue aussi sous le nom de projection de Babinet ou projection elliptique, le qualificatif de *projection équivalente de Mollweide* indique qu'elle privilégie la conservation des surfaces à la conservation des angles (projection conforme) : c'est pourquoi on y recourt principalement pour les cartes de l'ensemble de la sphère reproduites sur une surface réduite.

Cette projection fut publiée pour la première fois en 1805 par le mathématicien et astronome prussien Karl ou Carl Brandan Mollweide (1774 – 1825) de Leipzig, en tant qu'alternative à la projection de Mercator. Jacques Babinet en vulgarisa l'emploi en 1857, sous le nom de projection homolographique.

La projection de Mollweide est une projection pseudo-cylindrique où l'équateur est représenté comme une droite horizontale perpendiculaire au méridien origine. La longueur des autres parallèles diminue à mesure que l'on progresse vers les pôles, tandis que les autres méridiens sont équidistants au niveau de l'équateur. Les méridiens de longitude 90° est et ouest, décrivent un cercle parfait, et le contour du planisphère est une ellipse dont les diamètres sont dans le rapport 2:1. La surface comprise entre un parallèle et l'équateur sur cette carte est proportionnelle à la surface comprise entre ces mêmes lignes à la surface du globe, mais au prix d'une distorsion bien visible aux intersections de ces lignes.

8- La projection stéréographique



En géométrie et en cartographie, la projection stéréographique est une méthode permettant de représenter une sphère privée d'un point sur un plan. On convient souvent que le point dont on prive la sphère sera un des pôles de celle-ci, par exemple ici le pôle nord, et on projette sur un plan qui sépare les deux hémisphères, nord et sud, de la sphère, qu'on appelle plan équatorial. Deux propriétés importantes de cette projection : tout cercle sur la sphère, sauf ceux passant par le pôle sud, sera transformé en un autre cercle dans le plan équatorial et aussi le fait que les angles sont conservés pendant la transformation (transformation conforme).

Conclusion de la partie II

Du point de vue des modélisations mathématiques qui sont à la base de la cartographie des planisphères on voit qu'on s'éloigne de la zone proximale de développement de compétences de nos élèves de collège. Par contre sur des problématiques de navigation et les mathématisations possibles en collège peuvent conduire à construite des supports de « tâches complexes ». Nous allons ajouter des extraits d'un article récent construit lors de la journée « Mathématiques pour la Planète Terre » du 5 mars 2013, *(voir Le Café pédagogique , l'Expresso du 6 mars 2013) et des sites utiles.* Nous signalons que, pour que la tâche complexe soit vraiment réalisable, une condition nécessaire est que les mathématisations possibles soient situées dans la zone proximale de développement des élèves, mais cette condition n'est pas suffisante, car c'est dans la gestion conjointe des productions des élèves que la tâche complexe permet l'apprentissage visé et le développement des compétences.

Des maths pour la planète terre. ***Pour quelques heures, Paris est devenu la capitale mondiale des maths le 5 mars. L'Unesco accueillait la Journée des mathématiques pour la planète terre (MPT). Cette initiative soutenue par une centaine d'instituts de recherche et de sociétés savantes comme l'Union Mathématique Internationale, propose des événements et des expositions tout au long de 2013. A Paris, la Journée MPT a récompensé trois doctorants en mathématique pour des réalisations qui montrent l'importance des mathématiques pour relever les défis environnementaux de la planète.***

La Journée MPT doit beaucoup à Christiane Rousseau, professeure au département de mathématiques de l'université de Montréal. C'est elle qui a eu l'idée d'un projet international d'applications mathématiques pour la gestion de l'environnement. Le projet nord-américain a pris une dimension mondiale au point de devenir un des grands événements intellectuels de l'histoire des mathématiques.

Les maths au service de la terre

Christiane Rousseau a invité à "regarder le monde avec les lunettes des mathématiques". Elle a montré comment les maths sont mobilisées pour gérer la biodiversité. Par exemple pour gérer les droits de pêche ou encore pour calculer les conséquences du changement climatique. Elles interviennent dans la vie quotidienne des citoyens.

D'autres exemples ont été fournis par le concours lancé par MPT2013 auprès des étudiants en mathématiques. C'est un espagnol, Daniel Ramos, qui a obtenu le premier prix pour un logiciel de projection cartographique facile à paramétrer. ...

Pour Charles Torossian, inspecteur général de mathématiques, le programme MPT2013 renvoie à des mathématiques "comme on souhaite les diffuser dans l'éducation nationale, dans une approche concrète qui permettra de motiver les élèves". Il souligne aussi la dimension interdisciplinaire des projets présentés.

Dans la ligne de cet article qui souhaite que les élèves soient bien motivés, on peut envisager qu'ils travaillent autour de modélisations mathématiques à partir de questions de navigation, de distances sur une carte. Si les cartes ont une échelle assez grande, alors les élèves du collège peuvent mesurer sur la carte et proposer des solutions géométriques qui peuvent s'inscrire dans les potentiels d'apprentissage d'une tâche complexe, ou d'une démarche d'investigation, mais c'est toujours dans la gestion des productions des élèves faite par l'enseignant conjointement avec les élèves que les enjeux sont fondamentaux. On vous cite quelques travaux qui peuvent vous donner des idées pour construire des tâches complexes. Dans l'IREM de Poitiers : Angles sur la terre en classe de 6ème, rose des vents, cap sur une carte, mesurer la largeur d'une baie, IREM de Poitiers, équipe collège, dans L'IREM de la Réunion : Découverte de la latitude et du sextant. Comment se repérer en mer ?, Saint-Denis, 2012 Type : document pour la classe issu de travaux de groupe de travail *Langue :* Français *Support :* internet Utilisation : enseignant Niveau : collège, lycée, 2nde, aussi dans les autres travaux didactiques de mathématiques sur le site:http:/publimaths.fr Requête : mathématiques et navigation.

III) Analyse de la proposition de notre collègue

Il est question de proposer aux élèves de s'intéresser au problème suivant :

Les cartes anciennes et modernes sont-elles en accord avec « la réalité » des aires des continents ?

L'interrogation didactique est en conséquence de savoir si les élèves ont des compétences au collège pour proposer différentes stratégies pour répondre à cette question.

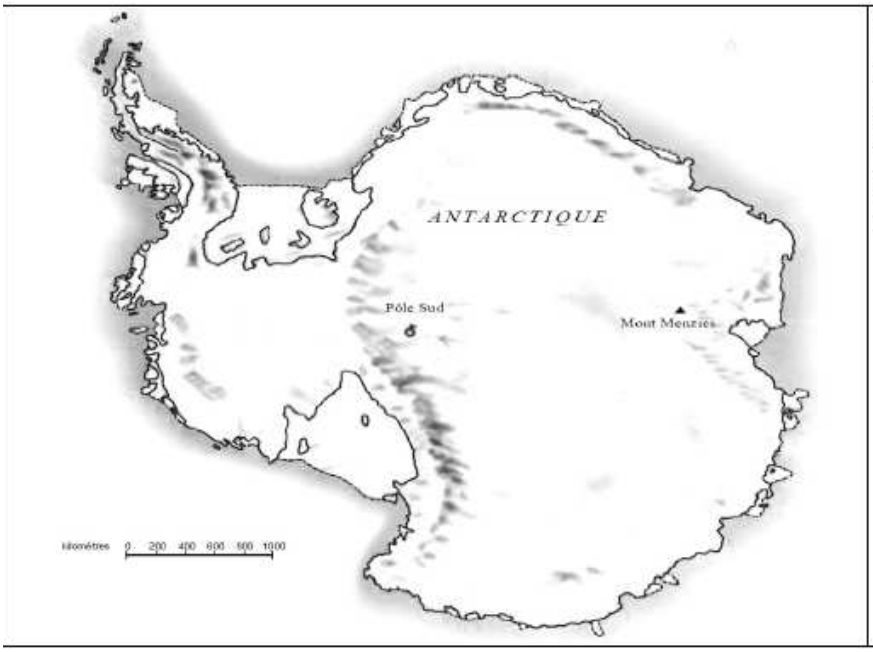
Étant donné que les modélisations mathématiques qui sont à la base des planisphères sont loin des compétences des élèves du collège nous ne voyons pas comment les propositions des élèves pourront se situer dans le parcours des apprentissages du programme. Ils vont proposer probablement des procédures élémentaires qui seront mathématiquement non pertinentes voire fausses, comme par exemple décomposer les surfaces en rectangles sur les cartes et calculer l'aire en cm^2 et puis multiplier par le coefficient de l'échelle au carré, ce qui est faux sur les planisphères qu'ils ont à disposition.

A ce propos nous nous rappelons que dans les évaluations PISA 2003 il y avait un exercice sur une carte géographique du continent antarctique, (voir Évaluation PISA 2000. Culture mathématique, Exercices libres de diffusion) où l'on avait posé des questions concernant des évaluations de distances et aires de la « réalité » à partir de la carte donnée, (l'aire du continent antarctique est estimé par les géographes à 14 107 637 km^2).

Les évaluations PISA fournissaient aux élèves cette carte et la question sur l'aire était : « Estimez l'aire de l'Antarctique en utilisant l'échelle de cette carte. Montrez votre travail et expliquez comment vous avez fait votre estimation. (Vous pouvez dessiner sur la carte si cela vous aide pour votre estimation.) »

PISA donnait un crédit complet si l'approche utilisée et les résultats sont corrects, c'est-à-dire que la réponse est comprise entre 12 000 000 km^2 et 18 000 000 km^2.)

Nous allons nous référer au rapport n° 2006-034 de juin 2006 de l'Inspection générale de l'éducation nationale : « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire » où figure l'énoncé de l'exercice PISA 2003



Il s'agissait de donner d'abord la distance approximative entre le Pôle sud et le Mont Menzies, puis d'estimer l'aire de ce continent.

Dans ce rapport il est dit à propos de cet exercice « ...on perçoit que des compétences générales doivent être mises en jeu ; il s'agit en particulier de passer d'une situation concrète à un modèle mathématique, de réaliser des raisonnements déductifs, de faire preuve de cohérence lorsque l'on donne un résultat. »

On peut remarquer que l'échelle est donnée sur la forme graphique et alors la distance entre deux points sur la carte sera comparée à celle de l'échelle graphique. Les élèves doivent donc être capables de maîtriser cette procédure et s'ils n'ont pas pratiqué avant ils seront placés sur une difficulté supplémentaire pour l'estimation de l'aire.

Cet exercice a été repris par des collègues du secondaire et du primaire dans différentes académies pour travailler autour des aires et échelles et le considérer comme un support d'une possible « situation problème » ou « problème ouvert » ou « tâche complexe » selon leur choix de caractérisation didactique.

Par exemple nous avons lu une proposition qualifiée par les collègues de « tâche complexe » à partir de l'exercice « l'antarctique » de PISA avec une proposition de « variante » à faire au préalable pour « éviter les difficultés liés à l'échelle » et alors ils donnent aux élèves, une tâche d'encre sur une feuille et chaque élève doit « estimer l'aire de la tâche d'encre ».

On voit que les collègues s'aperçoivent de cette problématique liée à l'échelle de la carte en question.

D'autres collègues au contraire ont ajouté dans l'énoncé: « Estimez l'aire de l'Antarctique en utilisant l'échelle de la carte. » et ils présentent alors cet exercice comme étant de degré trois pour l'acquisition d'une compétence dans la rubrique: « choisir et combiner : Traitement d'une situation nouvelle et complexe ».

Et ils explicitent :

« Le réinvestissement dans une situation inédite : l'élève doit produire une réponse qu'il n'a pas mémorisée avant. Il doit effectuer une recherche approfondie dans le répertoire de ses ressources afin de déterminer celles qui lui seront utiles. Nous sommes là en présence d'une situation d'habileté de haut niveau, proche de la notion de compétence, telle que définie précédemment. »...

Nous pensons que si l'on donne dans la consigne : « ... en utilisant l'échelle de la carte » on est en contradiction avec ce que ces collègues ont dit explicitement auparavant, car ainsi on donne à l'avance une direction à la stratégie des élèves et en conséquence on va à l'encontre de l'objectif d'ouvrir le plus possible le problème pour que chaque élève cherche dans ces ressources celui qui lui parait le plus adapté.

On peut aussi ajouter que dans cette méthode considérée correcte par PISA, on ne tient pas compte du fait qu'elle n'est pas adaptée pour un pays montagneux comme la Suisse où la vraie aire de la surface réelle et exploitable est plus grande que celle obtenue par une simple proportion ayant pour coefficient le carré de l'échelle, car dans les flancs des montagnes il y a aussi de la surface qui n'apparaît pas dans une projection sur un plan. D'où l'intérêt de travailler avec des cartes topographiques où apparaissent les courbes de niveau. Cette problématique appropriée par les élèves à l'aide de l'enseignant, peut susciter chez eux l'intérêt de calculer par exemple l'aire latérale d'un cône connaissant le disque de sa base et sa hauteur. Ainsi dans ce sens ils peuvent s'intéresser à des montagnes connues comme par exemple le montagne Pelée située au nord de la Martinique, qui a 1397 mètres de hauteur et un diamètre de onze à quinze kilomètres et une superficie de 120km² , les élèves peuvent réfléchir au calcul d'une fourchette de l'aire de la montagne Pelée avec les aires latérales de deux cônes de hauteur 1397 mètres, l'un de diamètre 11km et l'autre de 15km. Le volcan Stromboli se prête bien au même type d'étude. De même ils peuvent en s'intéresser à la superficie de la Suisse.

La superficie légale de la Suisse est de 41285 Km² ; est-ce qu'elle tient compte de la superficie des surfaces montagneuses ? Peut-on la retrouver par la méthode considérée comme correcte par les évaluations PISA ?

Conclusion:

Pour conclure nous disons que derrière la question de notre collègue **« est-ce que les cartes respectent la réalité des surfaces des continents sur les différentes planisphères, » se cachent quelques questions inévitables: « Comment construit-on les cartes ? » , « Quelle est sur une planisphère la précision des résultats obtenus pour les longueurs et les aires? », Comment connaît-on la superficie réelle des continents ? »**. Pour répondre à ces questions les élèves ne peuvent pas développer leurs compétences en mathématiques au niveau collège, car les connaissances épistémologiques mathématiques au sens de Vernaud G., (citées au début de notre article), **sont bien en dehors de la zone proximale de développement au sens de Vigotski L.**

Une autre direction que peuvent prendre les élèves est de savoir comment aujourd'hui on met les satellites au service de la cartographie. On sait que les mathématiques qui sont à la base du traitement des données satellites sont aussi de niveau bien loin du collège, donc tout ce qu'on peut faire autour de cette thématique des planisphères est intéressant à un niveau culturel, mais il ne s'agit pas de faire un support de « tâche complexe » en mathématiques, **par contre sur cette thématique, on peut faire un parcours d'étude et de recherche**, PER au sens des

travaux de notre équipe AMPERES dans l'INRP qu'aujourd'hui sont poursuivis par l'équipe PERMES de l'Ifé.

Dans ce parcours qui est interdisciplinaire par excellence et qui peut commencer en école primaire pour se poursuivre tout au long de collège doit intégrer les collègues d'autres disciplines; évidement l'histoire et la géographie en premier lieu. Dans ce parcours on peut étudier l'histoire de la construction de cartes, de la navigation et les grands voyages, l'histoire de la réalisation de planisphères complets du monde y compris la nouvelle hypothèse de Gavin Menzies, sur un voyage autour du monde des chinois en 1491 sous le commandement de l'amiral Zheng He qui aurait produit des cartes ayant servi à Christophe Colomb en 1492 et à Magellan plus tard en 1520, ceci pour apprendre que les connaissances en histoire ne sont pas figées pour l'éternité.

Ainsi on étudiera comment les navigateurs dessinaient le profil des terres et comment ils s'orientaient en latitude, longitude et par rapport aux étoiles. De même on peut s'intéresser aux formes et aires à partir de cartes et étudier l'influence selon l'échelle, sur les « vraies » formes et aires de la « réalité ». Aborder aussi le problème de représenter une surface sphérico-ellipsoïdale, (on dit aussi sphéroïde pour de référer à la forme spatiale de la Terre) sur le plan de la feuille. On peut aussi étudier les travaux de Jacques Cassini sur sa méridienne qui lui ont permis de découvrir que la longueur sur la méridienne correspondante à un degré, diminue des pôles vers l'équateur, ce qui veut dire que la Terre a une forme d'ellipsoïde aplati aux pôles.

On peut aborder le fait que sur une représentation plane on ne tient pas compte des surfaces des montagnes qui augmentent l'aire de la surface plane représentée. On peut étudier le fait que les cartes des surfaces de la taille d'une ville qui rentrent dans un format A4 permettent aux élèves de proposer de méthodes pour calculer sur la carte l'aire de la ville avec une très grande précision par rapport à la « réalité ». Par exemple pour la ville de Paris, trouver par le calcul sur une carte, sa superficie, la longueur du périphérique, la longueur de l'axe est-ouest, ou nord-sud et puis confirmer leur résultats avec les données de la mairie de Paris. Dans ce travail on doit intégrer les enseignants d'autres disciplines dans une didactique interdisciplinaire, même les arts plastiques pour une construction d'une maquette 'un quartier de Paris !

Nous pouvons citer ici une extrait de B.O. Spécial N° 6 du 28 août 2008 sur la partie des programmes du collège pour l'histoire, géographie et éducation civique: « *Il s'agit enfin de donner aux élèves la pratique des outils que la géographie met, quotidiennement, au service d'une meilleure compréhension de l'espace : cartes et croquis, mais aussi schémas, images, documents statistiques… Les systèmes d'information géographiques (SIG) sont désormais d'une utilisation courante (carte routière en ligne, systèmes de positionnement, images satellitaires…). Les élèves doivent en apprendre l'usage et en acquérir l'intelligence. Ils constituent des outils privilégiés tant au service de l'acquisition de connaissances que de la pratique de l'approche géographique. »*

On conclut en disant que notre collègue a raison de s'intéresser à la valeur pédagogique de l'univers des planisphères, mais que ceci se prête plutôt à une exploitation dans un parcours d'étude et de recherche bien conçu tout au long du collège, que dans une « tâche complexe » isolée.

Bibliographie

[1] Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations didactiques : didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

[2] Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[3] Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris : PUF.

[4] Vergnaud, G. (1994) *Apprentissages et Didactiques. Où en est-on ?,* Hachette.

[5] Vergnaud G. (1999) *A quoi sert la didactique*. Sciences Humaines, La dynamique des savoirs,
Hors-série N° 24, Mars/Avril 1999

[6] Roger Brunet (1987) *La carte, mode d'emploi*, Paris Fayard/Reclus

[7] Monmonier Mark (193) *Comment faire mentir les cartes* Flammarion

[8] Le Fur Anne (2007) Pratiques de la cartographie, Paris, Armand Colin

[9] Gavin Menzies, (2007) 1421, *L'année où la Chine a découvert l'Amérique*, Intervalles, traduit de 1421: The Year China Discovered the World, Bantam Books, 2002 réédition 1421: The Year China Discovered America, HarperCollins Publishers, 2003

Sitographie :

Eduscol: http://eduscol.education.fr

Site très complet sur « tâche complexe », « compétences » , « évaluation », les programmes et les documents d'accompagnement.